Estratègies per a resoldre problemes

Hi ha alguns problemes que disposen d'un algoritme de resolució. En aquest cas, identifiquem el problema i apliquem l'algoritme. Si no és aquest el cas, una altra possibilitat és recórrer a la nostra experiència en resolució de "problemes-tipus" (davant d'un problema nou el comparem als que tenim "en memòria", intentem ajustar-lo a un determinat "problema-model" i apliquem el seu mètode de resolució). Però les investigacions matemàtiques, pel seu caràcter més obert, no ens permeten fer-ho sempre d'una manera tan clara. Cal, per tant, disposar d'algunes estratègies més generals que ens facilitin el seu abordatge i resolució.

No existeixen receptes per resoldre problemes d'investigació. El que sí podem fer és, a partir de posar en situacions d'investigació als nostres alumnes, anar explicitant progressivament algunes tècniques i estratègies generals que els poden ajudar a realitzar-les. Intentarem, a continuació, presentar les més bàsiques, tot fent referències a problemes plantejats en les investigacions que hem publicat anteriorment al web del CESIRE-CREAMAT (http://goo.gl/yBkmou).

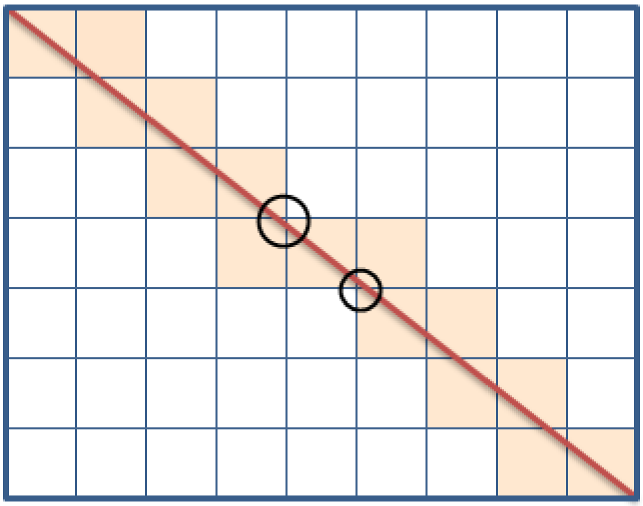
A la fase d'abordatge

- *Començar per fer "alguna cosa"*

Molts problemes d'investigació no tenen un enunciat que s'entengui "a la primera" o que estigui perfectament definit. Hi ha aspectes que s'aniran comprenent a mesura que es comencin a fer unes primeres proves, a realitzar un primer acostament. Per tant no ens hem de quedar aturats. S'ha d'arrencar "fent coses". Per exemple:

- si el problema consisteix en trobar l'estratègia d'un joc, cal fer unes primeres partides per veure clares les regles. La proposta *El joc d'investigar el joc* (http://goo.gl/CXXubz) es dedicava íntegrament a l'anàlisi de jocs.
- en la investigació *Tallar i multiplicar* (http://goo.gl/EX0v6H) (descompondre un nombre en sumands i multiplicar aquests sumands amb l'objectiu d'aconseguir el producte màxim) sovint ens autolimitem a descompondre en dos sumands, però... posa aquesta limitació l'enunciat?
- A *Quants quadrets talla la diagonal* (http://goo.gl/cBLrJS) (esbrinar sense fer el dibuix i coneixent els costats d'un rectangle dibuixat sobre paper quadriculat, quants quadrets tallarà la diagonal) descobrirem que cal ser precís amb el dibuix perquè no sempre és clar si es talla el quadret o passa pels

vèrtexs. Quan es passa per un vèrtexs comú no passa per dos quadrets, però si passa molt a prop se'n tallen tres.



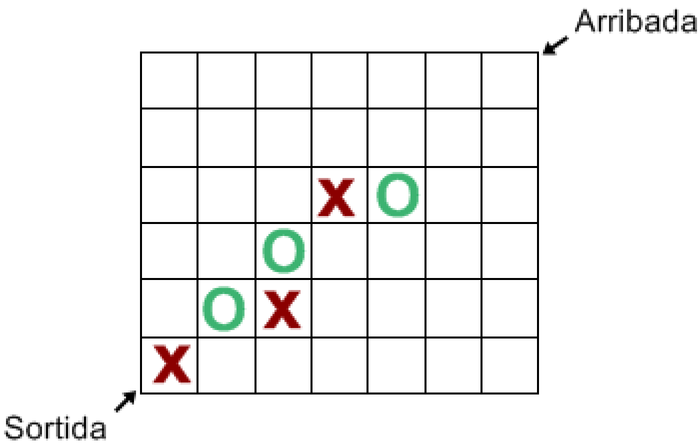
És bo crear un ambient de classe on fer aquestes primeres proves, sense cap objectiu clar encara, estigui ben valorat, trencant la idea de que hi ha una sola manera de fer les coses i es tracta de descobrir quina és.

- *Assaig i millora*

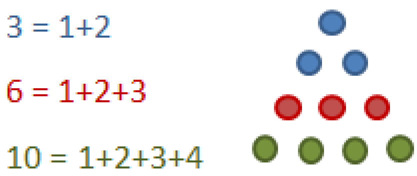
Les primeres proves no només ens ajuden a millorar la comprensió del problema sinó que són un primer acostament a la seva resolució. És quan es comencen a fer, de forma més o menys conscient, les primeres conjectures, les primeres modelitzacions. O quan s'intueixen unes primeres maneres d'organitzar la investigació. Convé fer conscient al nostre alumnat de que aquestes proves poden tenir un valor constructiu si es van reorientant a partir de les primeres observacions. També, com en el cas anterior, cal fer veure que és una estratègia acceptada i valorada a l'aula.

- *“La teva cara em sona”*

Com hem dit abans, a mesura que la nostra experiència en resolució de problemes augmenta, també augmenta la nostra memòria sobre problemes resolts. En aquesta fase de resolució del problema, i en les posteriors, convé estar atents per veure si es reconeix algun aspecte del problema, global o parcial, que ja s’hagi resolt en alguna altra ocasió i pugui suposar una ajuda. Una forma més elaborada d’aquest “reconeixement” és la cerca *d’analogies*. Per exemple, el *joc de les dues piles* (hi ha dues piles amb fitxes; cada jugador pot agafar una fitxa d’una d’elles o una de cada; guanya qui deixa la taula neta) (http://goo.gl/cGr1RS) és anàleg al que es coneix com el *joc de l’aranya* (sobre una quadrícula i alternadament un jugador dibuixa creus i l’altre rodones; es pot avançar un quadre amunt, a la dreta o en diagonal; es surt d’un dels vèrtexs inferiors; guanya el que arriba al vèrtex oposat diagonalment).



Un altre exemple el podem trobar en la investigació *Nombres consecutius* (descobrir pautes en l’observació de que gran quantitat de nombres es poden descompondre en la suma de consecutius; per exemple 15 = 7+8 = 4+5+6 = 1+2+3+4+5) (http://goo.gl/Q3xWXt) on podem trobar algunes relacions amb els nombres triangulars.



A la fase d'atac

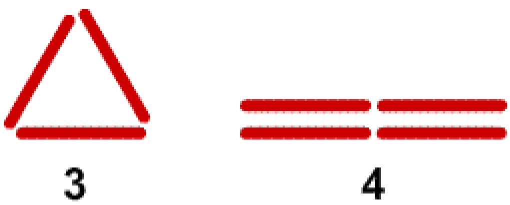
- *Reduir el problema – Provar amb casos més senzills - Acotar*

Si un problema es planteja amb nombres grans es pot provar de trobar pautes amb nombres més petits. Si el problema és un joc es pot reduir el tauler, la quantitat de fitxes o totes dues coses. O estudiar un tros de partida ja començada. També es poden intentar resoldre alguns casos particulars abans de trobar la solució general. Per exemple, en el problema *Jugar amb els dits d'una mà* (http://goo.gl/mGoyy2) que fa una investigació sobre una forma de comptar amb cinc dits, es pot intentar resoldre'l amb dos dits, o amb tres...

- *Provar ordenadament*

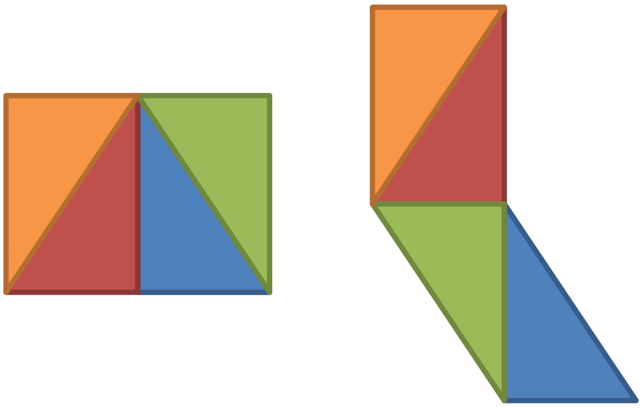
Un exemple d'aquesta estratègia és començar per casos més senzills i avançar progressivament cap als més complicats. És semblant a la reducció del problema, però el fet de progressar amb ordre simplifica i facilita l'observació de pautes. Un exemple clar el tenim si apliquem aquesta estratègia a la investigació *Nombres consecutius* (http://goo.gl/Q3xWXt). En aquest cas serà molt útil investigar l'1, després el 2, el 3, etc.

Exemples semblants els podem aplicar a investigacions com *Construïm triangles amb llumins* (http://goo.gl/WEICf4) o *Xarxes i nodes* (http://goo.gl/9OGRwP) de les propostes que des del CREAMAT vam fer en la campanya *Impulsem la geometria* (http://goo.gl/lrCtQ3).



Hi ha problemes amb més d'una variable com, per exemple, *Quants quadrets talla la diagonal* (http://goo.gl/cBLrJS), ja que cada costat és una variable. En aquest cas "treballar ordenadament" pot implicar provar alguns casos fixant-ne una de les dues. Per exemple, estudiar uns quants rectangles en els que un dels costats sigui 4 (4x1, 4x2, 4x3, 4x4, 4x5, ...).

Aquesta estratègia va molt bé també en exploracions que conviden a buscar casos diferents amb unes regles específiques com trobar tots el triangles possibles en un geoplà de 3x3 o buscar totes les formes que es poden fer amb quatre triangles rectangles iguals, per exemple.



- *Organitzar la informació – Fer taules*

Si és un problema en el que es va acumulant informació és bo recollir-la en forma de taula. I si és possible anotar les dades de forma ordenada encara millor. Això ajuda a anar trobant, per exemple, pautes de creixement. Per exemple a la investigació *Quants costats?* (investigar quin és el màxim de costats que es pot obtenir en un polígon creat en un geoplà de 3x3, de 4x4, de 5x5, etc.) (http://goo.gl/ydOIHh) es podrà observar que als geoplans d'ordre senar (excepte el de 3x3) el màxim que s'obté sempre és el quadrat menys un i en els d'ordre parell, el quadrat.

Geoplà	Costats
3x3	7
4x4	16
5x5	24
6x6	36
7x7	49
8x8	64
...	....

Equips	Partits	
2	2	
3	6	+4
4	12	+6
5	20	+8
6	30	+10
7	?	+?
...	....	

Una taula ordenada, a més, permet predir els "casos següents" i comprovar-los després de forma pràctica. Per exemple, si s'està estudiant quants partits es jugaran en una lliga de dos equips, tres, quatre, etc., es pot construir una taula a partir de les proves que s'han fet. Si es descobreix el patró, el "ritme" de creixement de la quantitat de partits no serà difícil predir que per a 7 equips es jugaran 42 partits (30+12).

En aquestes taules, molt relacionades amb l'estratègia anterior (treballar ordenadament), convé qüestionar-se per quin número es comença: pel zero? Per l'u? Per quin nombre si s'estan estudiant polígons?

Hi ha un altre pas que es pot fer en cursos superiors (a partir de CS de primària). Si es mira verticalment la taula s'observa el creixement, però per donar respostes noves s'ha d'actuar de forma recurrent: no se sap la quantitat de partits d'un cas si no es coneix l'anterior. Cal canviar, en algun moment, a la mirada horitzontal de la taula: com d'un número s'obté l'altre. Això permetrà trobar lleis més generals i poder fer "salts" a la taula. Per exemple, a la investigació anterior, es pot afegir una columna que ajudarà a descobrir una llei que després es podrà descriure retòricament o mitjançant una fórmula, segons l'edat.

Equips	Partits	Càlcul
2	2	2 x 1
3	6	3 x 2
4	12	4 x 3
5	20	5 x 4
6	30	6 x 5
7	?	7 x ?
...	....	

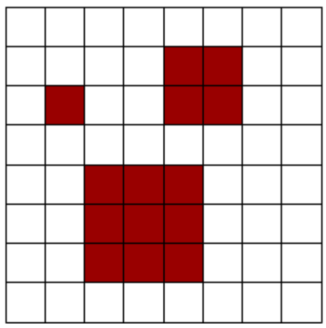
Fórmula retòrica: Multipliquem la quantitat d'equips, per exemple 7, pel número anterior, que és 6.

Fórmula semiretòrica: Partits = total d'equips x total d'equips menys un

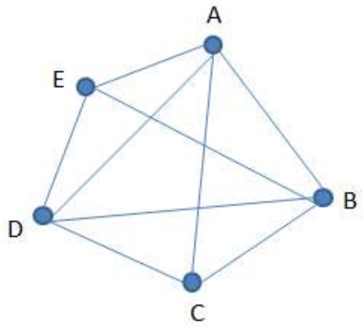
Fórmula algebraica: $P = n \cdot (n-1)$

- *Fer dibuixos o esquemes*

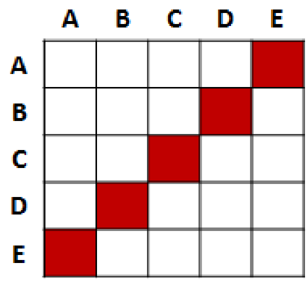
Hi ha investigacions que conviden a treballar de forma directa a partir de dibuixos o esquemes. Per exemple si proposem comptar tots els quadrats que es poden veure en una quadrícula de 8x8.



Però, en alguns casos, són esquemes que s'han "d'imaginar". La representació ajuda a visualitzar el problema, possibilita descobrir aspectes globals o parcials, fer analogies amb altres problemes. El problema que hem plantejat anteriorment sobre esbrinar els partits d'una lliga es pot representar de maneres diferents. Per exemple es pot fer un gràfic que representi els partits amb segments que representen connexions.



Aquest gràfic permet veure que falta una connexió entre C i E i es pot descobrir perquè no s'acompleix una regularitat: de cada punt surten 4 línies. Aquesta observació pot ajudar a veure una pauta secundària (de cada punt surten n-1 línies) que ajudarà a trobar la llei més general.

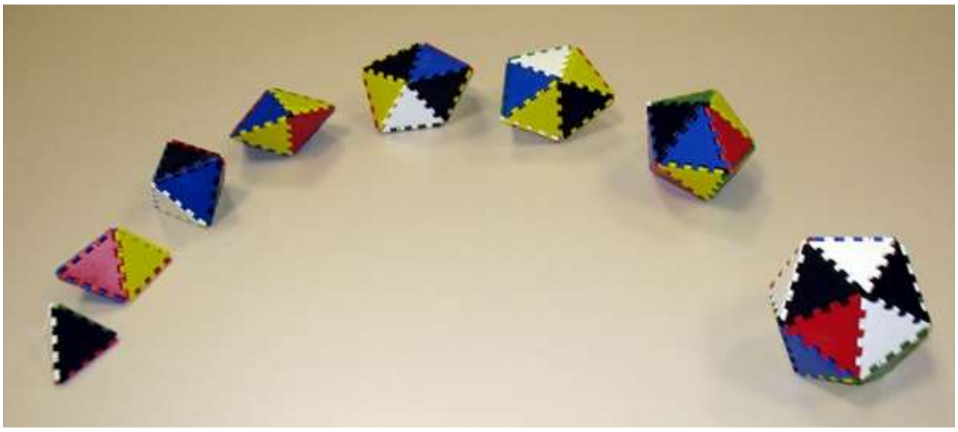


Aquesta altra forma de representar el problema (una taula de partits) pot proporcionar una fórmula general diferent. Aquí es veu un quadrat de 5x5 al que se li ha de restar la diagonal ($P = n^2-n$).

En general, uns bons esquemes poden ajudar a "visualitzar", a "pensar", a "revisar", a "explicar"...

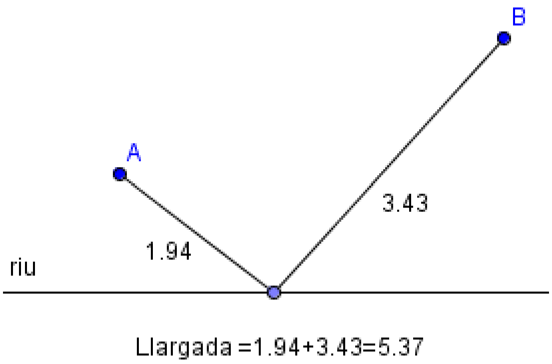
- *Treballar amb objectes – Manipular*

Com en el cas anterior hi ha investigacions que surten directament d'un material. Des de jocs on calen tauler i fitxes, a problemes plantejats a partir dels cossos de l'espai. Si en comptes d'explicar la relació d'Euler (en qualsevol poliedre la suma de les cares més els vèrtexs és dues unitats superior a la quantitat d'arestes) la fem "descobrir" ens caldrà proporcionar cossos reals per comptar cares, vèrtexs i arestes. És molt difícil plantejar a partir de dibuixos aquest recompte. Si la nostra intenció és descobrir quants deltàedres existeixen (http://goo.gl/7YusCo) (poliedres en els que totes les seves cares són triangles equilàters), necessitarem materials amb triangles encaixables.

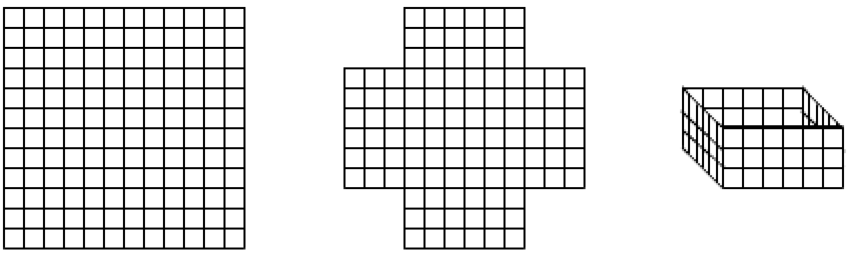


Hi ha ocasions en els que un material simplifica la resolució. Encara que no sigui una investigació, resoldre un quadrat màgic és més fàcil si retallem uns nombres que es poden anar canviant de lloc. La investigació que hem proposat abans sobre el recompte de quadrats en una quadrícula de 8x8 es pot facilitar amb quadrats dibuixats sobre paper vegetal que es podran anar desplaçant.

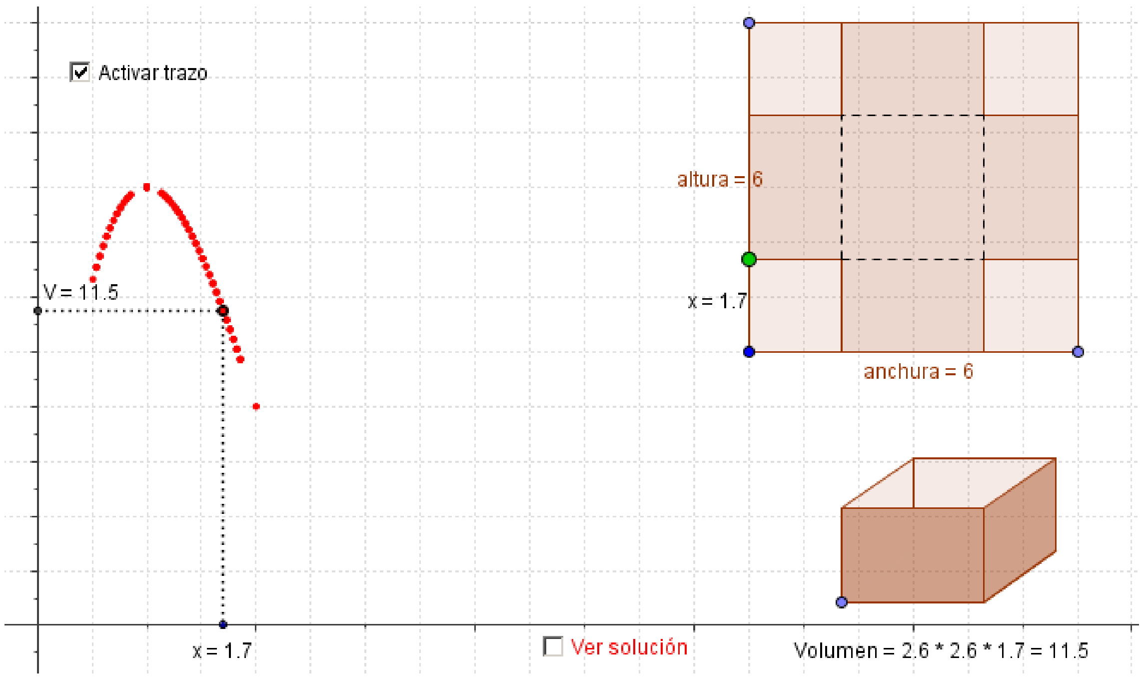
També es pot jugar amb simulacions fetes amb ordinador. Per exemple, es pot investigar amb una simulació amb *GeoGebra* si són igual de llargs tots els camins que uneixen dues cases que estan al mateix costat d'un riu i però que han de passar abans pel riu, per exemple perquè hem d'omplir un càntir d'aigua, i, a partir d'aquí intentar bus-buscar quin és el camí més curt, quin el més llarg, quines característiques tenen aquests camins...



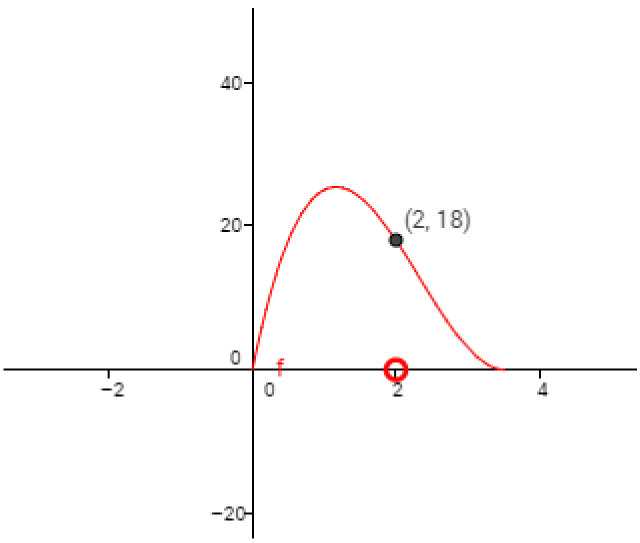
En ocasions podem combinar la manipulació real amb la virtual. Per exemple, si proposem investigar el volums que s'obtenen "tancant una caixa" a partir d'un quadrat o un rectangle al que li retallem les puntes, podem començar investigant sobre paper quadriculat i retallant directament sobre el paper.



Als cursos superiors d'ESO podem continuar la investigació sense el límit de la quadrícula i ens podem ajudar d'una simulació amb GeoGebra i fer exploracions sobre els creixements i decreixements, màxims, mínims, el gràfic associat...



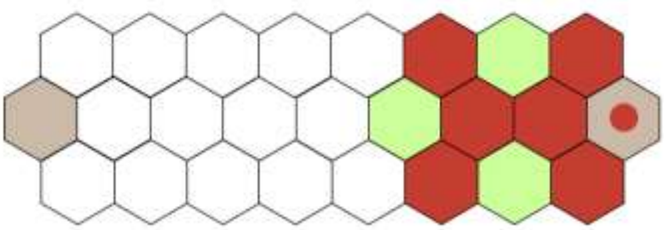
A batxillerat podem crear la funció, fer el gràfic, estudiar màxims i mínims, estudiar el gràfic de la funció derivada...



- *Començar des del final – Suposar el problema resolt*

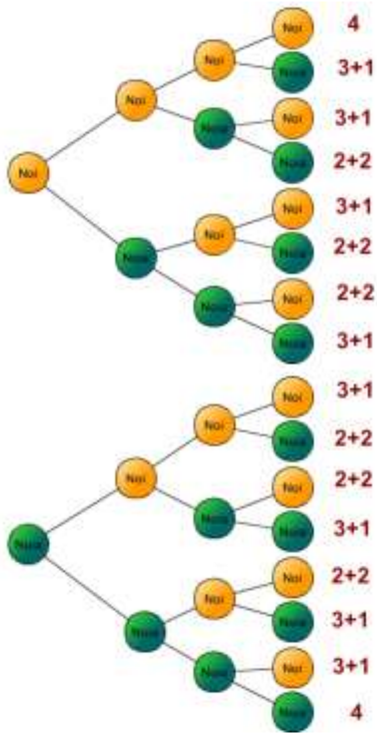
Si se sap quin és el final del problema es pot intentar esbrinar les característiques de la solució per mirar com s'hi pot arribar. Això pot ser molt útil en problemes de construcció geomètrica.

En l’anàlisi d’alguns jocs acostuma a ser una bona estratègia analitzar-los des de les darreres jugades i anar retrocedint cap al principi. No només s’aconsegueix una *reducció del problema* ja que, un cop situades jugades guanyadores o perdedores a la part final de joc, es podrà retrocedir una per una a jugades anteriors fins a determinar una estratègia global. Per exemple en el joc del Golf (agafant d’una pila alternadament cada jugador 1, 2 o 3 fitxes arribar a deixar-la neta) o en el de l’Abellot (un joc sobre tauler en el que qui porta la fitxa a la casella final guanya).

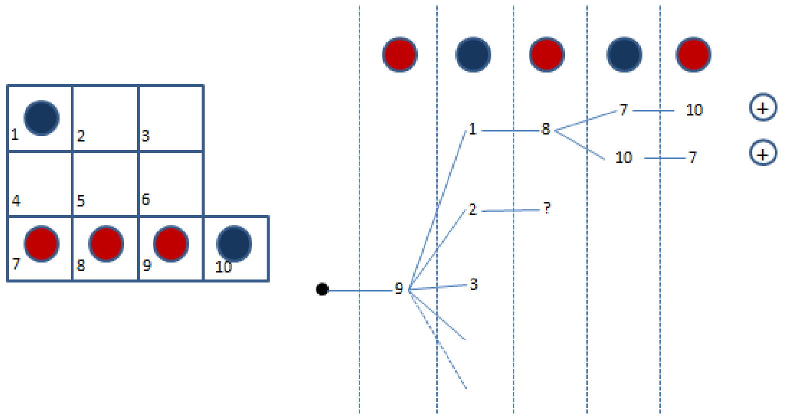


- *Diagrames en arbre*

És una tècnica que pot ajudar a estudiar ordenadament diferents alternatives sense deixar-se’n cap o a llistar i recomptar combinacions i ordenacions diferents. En problemes de probabilitat pot ser una eina essencial per comptar tots els casos possibles. Per exemple, en una investigació que tractar de mirar si en una família amb quatre fills és més probable tenir tres d’un mateix sexe que dos de cada.



Pot ser útil per estudiar un joc com el *Ta-te-ti més u* (un tres en ratlla amb una casella de més). També ens pot servir per anar explicant l'estratègia.



- *Mirar de quines eines disposem*

Algunes de les estratègies que hem presentat també són, en certa manera, eines. Un diagrama en arbre o una taula ho són clarament, però mirar si abans hem resolt un problema semblant, també. Hi ha moments en que hem de recórrer a coneixements que tinguem: operacions aritmètiques, resolució d'equacions, fórmules que coneguem, tipus de creixement (lineal, exponencial, logarítmic..), etc. Per exemple, el conjunt d'investigacions *Dividir per vèncer* (http://goo.gl/yBgf5P) demanen recórrer, en algun moment als nostres coneixements sobre la divisió o la divisibilitat.

Algunes actituds a fomentar

La resolució de problemes, les investigacions matemàtiques, no estan exemptes dels aspectes actitudinals. Podem destacar algunes actitud que cal fomentar.

- Fer coses, provar , no quedar-se aturat.
- No tenir por a l'error. Entendre que ens pot ajudar a millorar.
- Ser constants. Procurar no rendir-se aviat.
- Aprendre a jugar entre l'autoconfiança (en la pròpia intuïció, en les pròpies possibilitats, en les conjectures que anem fent...) i l'autodesconfiança (compro-var les conjectures, mirar que no ens deixem casos, que som rigorosos...)
- No deixar de revisar el problema. Observar si les conclusions tenen sentit. Si hi havia una pregunta inicial mirar si s'ha respòs. Veure si es pot resoldre d'una manera diferent, més curta, més clara, més "fàcil".

- Fer-se preguntes. Mentre s'investiga (les preguntes porten a les conjectures, a noves exploracions) i quan s'acaba, per exemple formulant variants dels problema, o pensant problemes derivats (les preguntes porten a noves preguntes). En conseqüència... aprendre a mirar interrogativament, críticament.
- Intentar explicar el que es fa, el que es pensa, les conclusions a les que es van arribant... ajudarà a veure si es tenen les idees prou clares, la seva fortalesa, a la vegada que es referma la seva comprensió. Però també s'ha d'aprendre a escoltar i acceptar les explicacions dels altres, els seus arguments.

Com podem intervenir

Com a mestres, professors o professores és recomanable controlar el nostre grau d'intervenció. Aquestes poden ser algunes idees:

- No tenir una pressa excessiva. Aprendre a donar temps.
- Deixar marge a l'error. Tractar de fer que el descobreixin (posant un contraexemple, fent que comprovin si la conjectura els funciona en tots els casos que tenen...) més que indicar-lo directament.
- Ajudar a desencallar. Si donem pistes millor que siguin en forma de pregunta. També podem proposar alguna eina nova, si cal. O ajudar a recordar les que coneixen.
- És important proposar les investigacions en grup. Afavoreix la descoberta, la contrastació de les conjectures, la construcció de les argumentacions.
- Podem adaptar les investigacions a l'edat, simplificant el problema, estirant-lo, ajustant el grau d'explicació i expressió matemàtica que demanarem.